

## МЕТОДЫ КОМПОЗИЦИИ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИНАМИКИ

О.Л.Бандман

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*

г.Новосибирск

e-mail: [bandman@ssd.sccc.ru](mailto:bandman@ssd.sccc.ru)

В статье представлено систематическое изложение методов композиции клеточных автоматов для моделирования пространственных процессов, состоящих из нескольких взаимодействующих компонент. Кратко рассмотрены два типа тривиальной композиции (параллельная и последовательная), в которых автоматы работают независимо друг от друга. Более подробно изложены оригинальные методы однонаправленной и двунаправленной композиций автоматов с общими переменными, которые позволяют строить единое клеточно-автоматное представление сложных процессов.

**Ключевые слова:** *пространственная динамика, дискретное моделирование, клеточный автомат, мелкозернистый параллелизм, композиция клеточных автоматов*

**Введение** В настоящее время проявляется большой интерес к моделированию пространственной динамики клеточными автоматами (КА) разного типа. Известно большое количество КА-моделей физических, химических и биологических процессов [1]. Из них наиболее известными и хорошо изученными являются КА-модели диффузии, решеточного газа (Gas-Lattice), разделения фаз, образования снежинок, кристаллизации и др. При этом, формальных методов синтеза КА, моделирующих сложные процессы, пока не существует, хотя отдельные приемы построения КА моделирующих процессы «реакция-диффузия» успешно использовались в [2,3]. В математической физике построение сложных моделей выполняется путем составления их из более простых. Существует набор функций и дифференциальных операторов, моделирующих типичные физические процессы (конвекцию, диффузию, химические реакции, распространение волн и т.д.), которые затем объединяются в системы уравнений, описывающих сложную пространственную динамику. Такая же стратегия может быть использована и для построения КА-моделей. Для ее реализации необходимо разработать математические операции в области определения и значений КА-функций. Некоторые из таких операций были введены в [2,4] для объединения реакционной и диффузионной составляющих в КА-моделях типа «реакция-диффузия». Однако, систематического подхода к методам композиции КА, насколько нам известно, пока не существует.

В представленном материале делается попытка восполнить этот пробел, распространив область применения методов композиции на широкий спектр модификаций КА, которые обладают основными свойствами классического КА фон-Неймана (пространственной распределенностью данных, локальностью и однотипностью клеточных и межклеточных взаимодействий, естественным параллелизмом), но допускают использование любого алфавита состояний, любых функций над переменными. Такому расширенному пониманию КА соответствует формальный аппарат алгоритма параллельных подстановок [5], который далее используется для построения правил композиции.

**Клеточные массивы и операции над ними.** Клеточный автомат выполняет преобразования пространственной функции, которая задается *клеточным массивом*, т.е. множеством  $\Omega = \{(u, t) : u \in A, t \in M\}$ , в котором пара  $(u, t)$  называется *клеткой*, где  $u$  - *переменная состояния* с областью определения из  $A$ ,  $t$  - *имя* из множества имен. Далее в примерах используются имена в виде целочисленных декартовых координат, например,  $M = \{(i, j) : i, j = 0, 1, \mathbf{K}, N\}$ . Символ  $t$  вместо набора координат применяется для упрощения общих выражений. На алфавит не накладывается никаких ограничений. Состояние клетки массива обозначается либо  $u(t)$ , либо  $u_m$ . На множестве имен вводится *именующая функция*  $j : M \rightarrow M$ , определяющая для каждой клетки связанного с ней соседа. На множестве имен  $M = \{(i, j) : i, j = 0, 1, \mathbf{K}, N\}$  именуемые функции обычно имеют вид сдвига,  $j = (i + a, j + b)$ , где  $a$  и  $b$  - целые числа, не превосходящие радиуса соседства  $r$ . Локальные взаимодействия между соседями задаются *взвешенными шаблонами*

$$Q(m) = \{(w_0 \cdot j_0(m)), (w_1 \cdot j_1(m)), \mathbf{K}, (w_n \cdot j_n(m))\}. \quad (1)$$

Значения весов  $w_k \in \mathbb{R}$  в (1) образуют весовой вектор  $W=(w_0, \dots, w_n)$ , а именуемые функции составляют шаблон соседства  $\Gamma = \{j_0(m), \mathbf{K}, j_n(m)\}$ . Когда для всех  $k=0,1, \dots, n$   $w_k=1$ , шаблон называется невзвешенным. Вектор соседства определяет для каждой клетки множество соседних клеток

$$S(m) = \{(u_0 \cdot j_0(m)), (u_1 \cdot j_1(m)), \mathbf{K}, (u_n \cdot j_n(m))\}, \quad (2)$$

называемое *локальной конфигурацией*, в которой  $U(m)=(u_0, u_1, \dots, u_n)$  - вектор её состояний. Каждая клетка функционирует как конечный автомат с правилами перехода, выраженными в виде *системы параллельных подстановок*  $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$  [5], где

$$\Phi_k : C(m) \bullet S(m) \rightarrow S'(m), \quad k=1, \dots, n, \quad \forall m \in M, \quad (3)$$

*параллельная подстановка*, в которой  $C(m), S(m), S'(m)$  - локальные конфигурации. Знак « $\bullet$ » обозначает условное объединение локальных конфигураций. Состояния клеток этого объединения являются входными для функции переходов клеток, входящих в  $S'(m)$ . Конфигурация  $C(m)$  называется *контекстной*, значения состояний её клеток при выполнении подстановки не меняются. Они только обозначают выполнение или не выполнение условий, разрешающих ее выполнение. Конфигурация  $S(m)$  является *базовой*, состояния ее клеток являются входными для функции переходов клеток, входящих в  $S'(m)$ , причем их именуемые шаблоны находятся в соотношении  $\Gamma(m) \subseteq \Gamma'(m)$ . Состояния клеток в  $S'(m)$  равны значениям функций переходов

$$u_m(t+1) = f_k(W(m), U(m)), \quad m \in \Gamma'(m). \quad (4)$$

Существует 3 режима функционирования КА. *Синхронный* режим предполагает возможность независимого выполнения подстановок всеми клетками и их одновременный переход в следующее состояние в моменты времени  $t=0,1, \dots$ . Этот режим применим для случаев, когда во всех подстановках  $|S'(m)|=1$ . *Блочно-синхронный* режим применяется, когда  $|S'(m)| > 1$ . Тогда на клеточном массиве строится несколько покрытий блоками так, чтобы в каждом из них для любой пары клеток  $S'(m_1) \cup S'(m_2) = \emptyset$ . Причем, в каждом покрытии подстановки выполняются синхронно и параллельно, тогда как покрытия обрабатываются последовательно. При асинхронном режиме все подстановки выполняются последовательно в произвольном порядке. В любом случае переход в новое глобальное состояние  $\Omega(t+1)=\Phi(\Omega(t))$  считается одной итерацией. Последовательность  $\Omega(0), (1), \dots, \Omega(t), \dots, \Omega(T)$  называется *эволюцией* КА, причем  $T$  означает момент ее завершения. В терминах введенных понятий КА определяется как пара:  $\Theta=(\Omega, \Phi)$  с указанием на режим функционирования.

Для выполнения КА-композиций на множестве клеточных массивов необходимо определить математические операции [4] над клеточными массивами. Унарные операции – это преобразование булева массива  $\Omega = \{(v_m, m)\}$  в вещественный  $\langle \Omega \rangle = \{(\langle v_m \rangle, m)\}$  и обратное - аппроксимация вещественного массива  $U = \{(u_m, m)\}$  в булевый  $\Omega = \{(v_m, m)\}$ . Первое преобразование производится путем тривиального осреднения, т.е. вычисления средних значений состояний клеток в *области осреднения*  $Av(m) = \{(v_0, m), (v_1, \mathcal{U}_1(m)), \mathbf{K}, (v_q, \mathcal{U}_q(m))\}$  следующим образом

$$\langle v_m \rangle = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^q v_k, \quad v_k \in \{0,1\}, \quad \langle v_m \rangle \in (0,1). \quad (5)$$

Второе преобразование состоит в расстановке единиц и нулей в  $\Omega$  так, чтобы

$$v_m = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p = u_{ij} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

На множестве клеточных массивов определены бинарные операции, которые подразделяются на арифметические, логические и «физические». Арифметические операции допускаются над массивами, в которых все операнды имеют вещественный алфавит состояний. Пусть  $\circ$  обозначает одну из трех операций: +, -, или  $\times$ , тогда

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_1 \circ \Omega_2 : & \quad (u, m) = (u_1 \circ u_2, m) \quad \forall m \in M, \\ \Omega = c\Omega_1 : & \quad (u, m) = (cu_1, m) \quad \forall m \in M. \end{aligned} \quad (7)$$

В классе булевых клеточных массивов аналогичным образом определяются логические операции И, ИЛИ, НЕ. Когда операнды имеют разные алфавиты, то математические операции называются *гибридными* и определяются так, чтобы (5) было справедливо для осредненных форм Булева массива (обозначающих обычно физические величины). Пусть  $\Omega_1 = \{(u_m, m) : u_m \in (0,1)\}$ ,  $\Omega_2 = \{(v_m, m) : v_m \in \{0,1\}\}$ ,

тогда операция их сложения  $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$  с результатом в виде Булевого массива  $\Omega = \{(v'_m, m)\}$  выполняется следующим образом

$$v'_m = \begin{cases} \bar{v}_m & \text{с вероятностью } p_1(m), \text{ если } (u_m > 0 \ \& \ v_m = 0), \\ \bar{v}_m & \text{с вероятностью } p_2(m), \text{ если } (u_m \leq 0 \ \& \ v_m = 1), \\ v_m & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (8)$$

где 
$$p_1(m) = \frac{u_m}{1 - \langle v_m \rangle}, \quad p_2(m) = \frac{|u_m|}{\langle v_m \rangle}. \quad (9)$$

Умножение булева массива  $\Omega = \{(v_m, m)\}$  на константу  $c$  с результатом в виде булева массива  $\Omega = \{(v'_m, m)\}$  сводится к вычислению состояний

$$v'_m = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p = c \langle v_m \rangle, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

**Тривиальные композиции клеточных автоматов.** КА  $\Theta_1 = (\Omega_1, \Phi_1)$  является *тривиальной* композицией двух КА  $\Theta_1 = (\Omega_1, \Phi_1)$  и  $\Theta_2 = (\Omega_2, \Phi_2)$ , если системы их подстановок  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  не имеют общих переменных, взаимодействуя только в начале и конце своих эволюций. Для *последовательной* композиции это означает, что

$$\Omega(0) = \Omega_1(0), \quad \Omega_1(T) \subseteq \Omega_2(0), \quad \Omega(T) = \Omega_2(T), \quad M_1 \subseteq M_2. \quad (11)$$

Шаги по времени в  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  могут быть различны. Второй КА начинает эволюционировать, когда первый завершает работу. Важным случаем является циклическая работа нескольких (возможно с разнотипными алфавитами КА) [2,3].

**Пример 1.** Два КА с булевыми алфавитами и одинаковыми множествами имен  $M = \{(i, j, k): i, j = 0, \dots, 200, k = 1, 2\}$  образуют последовательную композицию, которая моделирует формирование устойчивого образа в виде пятен и полос. В исходном состоянии массив имеет две вертикальные полосы по краям массива (рис.1а). Первый КА моделирует предварительную диффузию которая за  $T_1 = 200$  итераций сглаживает границы высокой концентрации (рис. 1б). Его функция переходов представляются двумя подстановками  $\Phi_1: C_1(i, j) \bullet S(i, j) \rightarrow S'_1(i, j)$ , и  $\Phi_2: C_2(i, j) \bullet S(i, j) \rightarrow S'_2(i, j)$ , где  $C_1 = (\text{rand} > 0,5, (i, j, 2))$ ,  $C_2 = (\text{rand} \leq 0,5, (i, j, 2))$ ,  $\text{rand}$  – случайное число в диапазоне (0,1)

$$\begin{aligned} S(i, j) &= \{(a, (i, j, 1)), (b, (i+1, j), 1), (c, (i+1, j+1, 1)), (d, (i, j+1, 1))\}, \\ S'_1(i, j) &= \{(b, (i, j, 1)), (c, (i+1, j, 1)), (d, (i+1, j+1, 1)), (a, (i, j+1, 1))\}, \\ S'_2(i, j) &= \{(d, (i, j, 1)), (a, (i+1, j, 1)), (b, (i+1, j+1, 1)), (c, (i, j+1, 1))\}. \end{aligned} \quad (12)$$

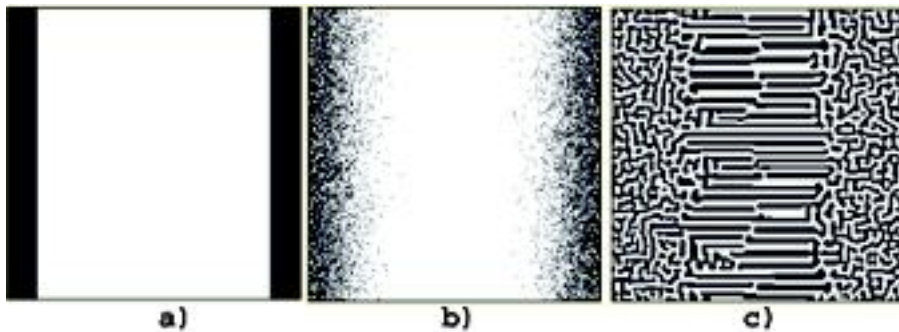


Рис.1

Последовательная композиция КА: а) исходное состояние, б) результат 200 итераций КА диффузии (12), с) результат применения к полученному массиву КА формирования устойчивого образа (13)

КА работает в блочно-синхронном двухшаговом режиме. На первом шаге (13) применяется к  $2 \times 2$  блокам с четными  $i, j$ , на втором - с нечетными [6]. Второй КА [1] перераспределяет концентрацию вещества формируя устойчивый образ, состоящий из кривых коротких и прямых длинных полос (рис 1с). Его функция переходов состоит из одной бесконтекстной подстановки в которой  $S(i, j)$  имеет весовой шаблон с радиусом  $r=3$  вида  $Q(i, j) = \{(1, (i+k, j+l))\} \cup \{(-0,2, (i+g, j+h))\}$ ,  $k, l = -1, 0, 1$ ,  $g, h = -3, -2, 2, 3$ , а правая часть  $S'(i, j) = (u_{ij}(t+1), (i, j))$ , где

$$u_{ij}(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{если } U \times W > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (13)$$

Параллельная тривиальная композиция удовлетворяет следующим условиям:

$$M_1 = M_2, \quad \Omega(0) = \Omega_1(0) = \Omega_2(0), \quad \Omega(T) = \Omega_1(T) \circ \Omega_2(T),$$

где знак  $\circ$  обозначает любую допустимую для терминальных массивов бинарную операцию, алфавиты могут различаться.

**Пример 2.** Два разных КА независимо моделируют один и тот же процесс разделения фаз. Их параллельная композиция представляет разницу конечных результатов. КА  $\Theta_1$  имеет булев алфавит, его функция перехода  $\Phi_1$  представлена одной бесконтекстной подстановкой с невзвешенным шаблоном соседства  $\Gamma(i, j) = \{(i+k, j+l) : k, l = -3, \dots, 0, \dots, 3\}$ . Единственная клетка правой части  $\Phi_1$  вычисляет  $u_{ij}(t+1)$ , которое равно 1, если  $s > 25$  или  $s = 24$ , иначе  $u_{ij}(t+1) = 0$ , где  $s = \sum_{k,l} u_{i+k, j+l}$ . Второй

КА - это конечно-разностное представление дифференциального уравнения в частных производных [8] того же процесса разделения фаз, которое в терминах КА представлено одной бесконтекстной подстановкой с базовой локальной конфигурацией, содержащей четыре соседа, и функцией перехода вида

$$u_{ij}(t+1) = u_{ij} + 0.2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij} - (u_{ij} - 0.1)(u_{ij} - 0.5)(u_{ij} - 0.9)). \quad (14)$$

Исходное состояние  $\Omega_2(0) = \langle \Omega_1(0) \rangle$ . Оба КА эволюционировали до устойчивых состояний.

Результат композиции  $\Omega(T) = \langle \Omega_1(T) \rangle - \Omega_2(T)$  (рис.2).

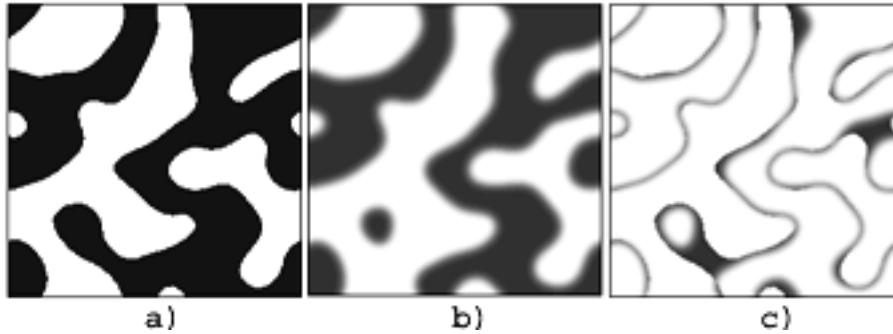


Рис.2. Параллельная композиция двух КА разделения фаз : а) результат применения Булева КА с взвешенным шаблоном , б) результат решения дифференциального уравнения (14), в) их разность

**Композиция КА с общими переменными.** Существует два вида композиций КА с общими переменными: *однонаправленная* и *двунаправленная*.

КА  $\Theta = (\Omega, \Phi)$  является *однонаправленной композицией* двух автоматов  $\Theta_1 = (\Omega_1, \Phi_1)$  и  $\Theta_2 = (\Omega_2, \Phi_2)$ , если в функция переходов  $\Theta_2$  используются переменные состояний  $\Theta_1$ , тогда как  $\Theta_2$  функционирует независимо от  $\Theta_1$ . Можно сказать, что  $\Theta_1$  играет роль контекста для  $\Theta_2$ . Формально композиция определяется следующими условиями. 1)  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $M_1 \subseteq M_2$ , 2) в базовых

локальных конфигурациях подстановок из  $\Phi_2$  могут содержаться клетки с именами  $m \in M_1$ , 3) взаимодействия между  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  должны быть синхронизированы, так как допускается чтобы каждой итерации одного КА соответствовало несколько итераций другого. Композиция этого типа используется в случаях, когда второй (зависимый) КА предназначается для того, чтобы сделать эволюцию первого наглядной и понятной.

**Пример 3.** КА  $\Theta_1 = (\Phi_1, \Omega_1)$ ,  $A = \{0, 1\}$ ,  $M = \{0, 1, \dots, N\}$ , моделирует процесс движения одномерных солитонов [9].  $\Phi_1$  содержит одну бесконтекстную подстановку с локальными конфигурациями  $S(i) = \{(u_{i-k}, i-k), \mathbf{K}, (u_i, i), \mathbf{K}, (u_{i+k}, i+k)\}$ ,  $S'(i) = (u_i', i)$ ,  $k = -r, \mathbf{K}, 0, \mathbf{K}, r$ , где

$$u_i' = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=-r}^r u_{i+k} = \text{четное число, но не } 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (15)$$

Подстановка применяется в упорядоченном асинхронном режиме. Это значит, что в момент  $t$  (19) применяется к  $(i=t)$ -й клетке. И при этом первые  $r+1$  клеток конфигурации  $S(i)$  оказываются уже в

следующих состояниях. Солитоноподобное поведение может быть получено только если начальный клеточный массив содержит определенные образы (называемые «частицами») [9]. В этом примере исходный образ содержит 2 частицы: «11011» и «10001001». Первая расположена правее второй на расстоянии 18 клеток. Применение подстановок продвигает первую частицу влево на 7 клеток за каждые 2 итерации, а вторую - на 12 клеток за 6 итераций. Таким образом, расстояние от первой частицы до второй уменьшается на 9 клеток за каждые 6 итераций. В течение времени от 12-й до 24-й итераций частицы совмещаются, а на 30-й итерации первая обгоняет вторую.

t= 0: 0000000000 ...0000000000**10001001**100000000000000000**11011**00  
t= 6: 0000000000...0000**10001001**1000000000**11011**10000000000000000000  
t=30: 000000000000000000000000**11011**0000**10001001**...00000000000000  
t=36: **011011**1000000000000000**10001001**100000...00000000000000000000

КА  $\Theta_2$  производит двойное осреднение состояний в клеточном массиве  $\Omega_1$  по формуле (5) при радиусе  $r=4$ . Шаблон соседства совпадает с областью осреднения  $Av(i)$ . В единственной подстановке вида (9)  $S(i) \subset \Omega_1$ , тогда как  $S'(i) \subset \Omega_2$ . Режим работы двухшаговый синхронный. Каждая итерация состоит из двух синхронных шагов по всему клеточному массиву. Краевые условия периодические (рис.3).

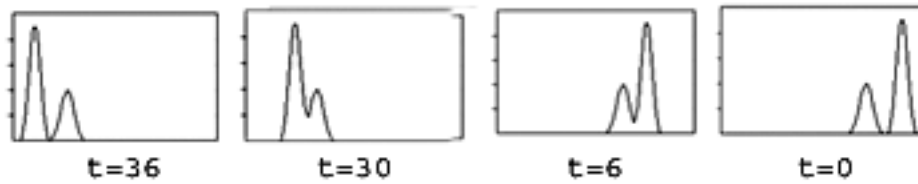


Рис. 3. Однонаправленная композиция КА: эволюция КА, выполняющего осреднение булевого КА-солитона (15)

КА  $\Theta = (\Phi, \Omega)$  является *двунаправленной композицией* двух КА  $\Theta_1 = (\Phi_1, \Omega_1)$  и  $\Theta_2 = (\Phi_2, \Omega_2)$ , если в функциях переходов каждого из них используются переменные состояний другого. Более формально. Двунаправленная композиция КА характеризуется следующими условиями: 1)  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ,  $M_1 = M_2$ , 2) базовые локальные конфигурации постановок обоих КА содержат клетки как из  $\Omega_1$  так и из  $\Omega_2$ , 3) взаимодействия между КА должны быть синхронизованы: они могут работать в едином синхронном или асинхронном режиме, а также один из КА может делать несколько итераций за одну итерацию другого. Композиция используется, когда в моделируемый процесс вовлечено несколько разных физических величин. Такие процессы в математической физике описываются обычно системами дифференциальных уравнений в частных производных второго и более порядков.

**Пример 4.** Композиция  $\Theta_1 = (\Phi_1, \Omega_1)$  и  $\Theta_2 = (\Phi_2, \Omega_2)$ , где  $\Omega_1 = \{(u_j, (i, j))\}$  и  $\Omega_2 = \{(u_2, (i, j))\}$ ,  $A_1 = A_2 = \{0, 1\}$ ,  $M_1 = M_2 = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, N\}$  моделирует процесс возникновения и взаимодействия локализованных самоорганизующихся структур [10]. Каждый из КА, в свою очередь, может быть представлен однонаправленной композицией КА-диффузии  $\Theta_{Dk}$  и КА-реакции  $\Theta_{Rk}$ , где  $k=1, 2$ , с гибридным сложением на каждой итерации, т.е.  $\Omega_k(t+1) = \Omega_{Dk}(t) \oplus \Omega_{Rk}(t)$ . Диффузионные КА представлены системами подстановок (12), при этом их физические коэффициенты диффузии сильно различаются:  $d_1 = 0.0025 \text{ см}^2 / \text{сек}$ ,  $d_2 = 0,025 \text{ см}^2 / \text{сек}$ . Чтобы привести эти величины к приемлемым для КА коэффициентам диффузии  $D_k = td_k / h^2$ ,  $D_1 = 1,5$ ,  $D_2 = 0,15$ , выбраны следующие шаги по времени и пространству:  $t=0,6 \text{ сек}$ ,  $h=0,1$ . Реакционные процессы заданы функциями:  $F_1 = Iu_1 - au_1^3 - bu_2$ ,  $F_2 = u_1 - u_2$ . Они реализуются КА бесконтекстными подстановками вида (3), где  $S_k(i, j) = Av_1(i, j) \cup Av_2(i, j)$ ,  $S'_k(i, j) = (F_k(\langle u_{ij} \rangle, \langle v_{ij} \rangle), (i, j))$ ,  $\langle v_{ij} \rangle$  и  $\langle u_{ij} \rangle$  -осредненные значения состояний клеток как в  $\Omega_1(t)$  так и в  $\Omega_2(t)$ . Исходные глобальные состояния массивов  $\Omega_k(0)$  равны случайным распределениям единиц с плотностью  $\rho_1=0,1$ ,  $\rho_2=0,9$ . Краевые условия периодические. На рис.4 показаны осредненные клеточные массивы обоих КА в нескольких моментах их эволюции. В обоих КА через несколько итераций появляются плотные пятна, которые начинают расти, причем плотности концентраций вне их постепенно выравниваются. В клетках пятен значения состояний колеблются с постоянной частотой и слабо меняющейся амплитудой. Пятна растут в обоих КА, постепенно захватывая весь массив.

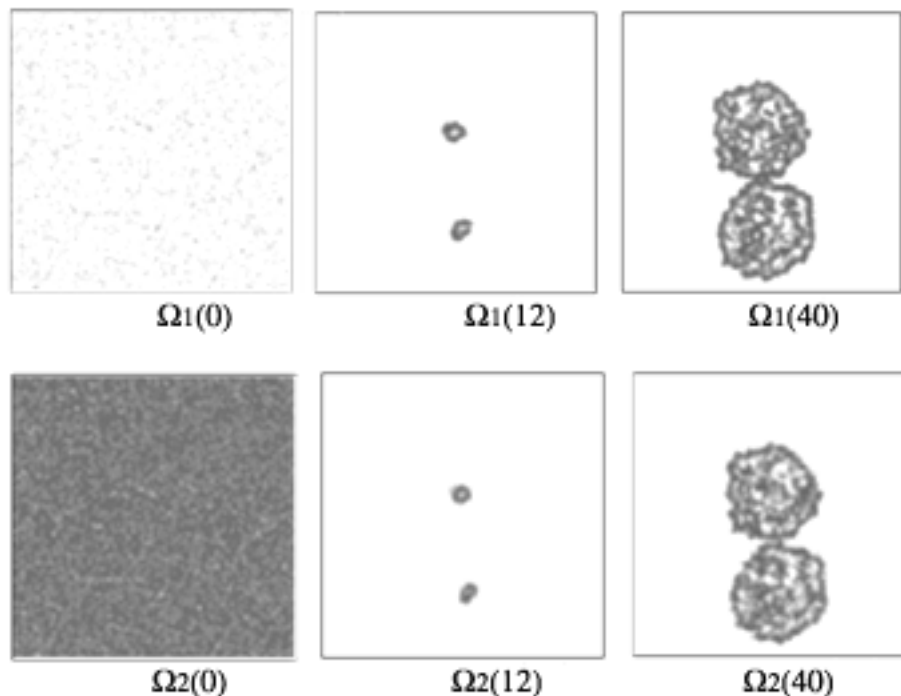


Рис 4. Двухнаправленная композиция двух КА реакционно-диффузионных процессов: вверху эволюция  $\Omega_1$ , внизу - эволюция  $\Omega_2$

**Заключение.** Систематизированы и изложены на основе единой формальной системы методы композиции клеточных автоматов с разными типами алфавитов, что позволяет существенно расширить возможность их использования для моделирования пространственной динамики физических явлений. Работа поддержана Программой фундаментальных исследований РАН № 17 (2004).

#### Литература.

1. S.Wofram. A New Kind of Science.- Wolfram Media Inc.,Champaign,Ill.,USA.- 2002.- 1200p.
2. J.R.Weimar. Cellular Automata for Reaction-Diffusion Systems // Parallel Computing.- Vol.23.-N 11, 1999.- P.1699-1715.
3. O.Bandman. Simulation Spatial Dynamics by Probabilistic CellularAutomata // Lecture Notes in Computer Science. - Vol. 2493, 2002. - Springer: Berlin. - P.10-19.
4. O.Bandman Spatial Functions Approximation by Boolean Arrays // Bulletin of Novosibirsk Computer Center, series Computer Science, 19. - Novosibirsk: ICMMG - 2003. - P.10-19.
5. S.Achasova, O.Bandman, V.Markova, S.Piskunov. Parallel Substitution Algorithm. Theory and Application. - World Scientific, Singapoore. -180 p.
6. T.Toffoli, N.Margolus. Cellular Automata Machines.- MIT Press,USA.- 1987.-280 p.
7. Г.Г.Малинецкий, М.Е.Степанцов. Моделирование диффузионных процессов клеточными автоматами с окрестностью Марголуса // Журнал вычислительной математики и математической физики – т.366 № 6,1998. – С.1017-1021.
8. F.Schlogl. Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions // Zh.Physik. - Vol.253, 1972.- P.147-161.
9. J.K.Park, K.Steiglitz, W.P.Thurston. Soliton-like behavior in Cellular Automata // Physica D. - Vol.19.-1986.- 423-432.
10. C.P.Schenk, P.Schutz, M.Bode, H.-G.Pyrwin. Interaction of selforganized quaziparticles in a two dimensional reaction diffusion system: The formation of molecules // Physical Review E.-Vol.5, N 6. - 1998. - P.6481-6486.

Бандман Ольга Леонидовна , главный научный сотрудник, тел 8 (3832) 34 11 13.